

Nyquist-ovi slučajevi

Riječ je o sistemima propusnicima niskih učestanosti kod kojih je propusni opseg proširen u odnosu na idealni sistem. Kod takvih sistema je:

$$A(\omega) = \begin{cases} A(\omega), & |\omega| \leq \omega_g \\ 0, & |\omega| > \omega_g \end{cases}, \quad \frac{1}{2}\omega_s \leq \omega_g \leq \omega_s$$

Ograničenje u realizaciji ovakvih sistema se ogleda u tome da se minimalni propusni opseg (slučaj idealnog sistema) može proširiti najviše 100%.

Polazeći od:

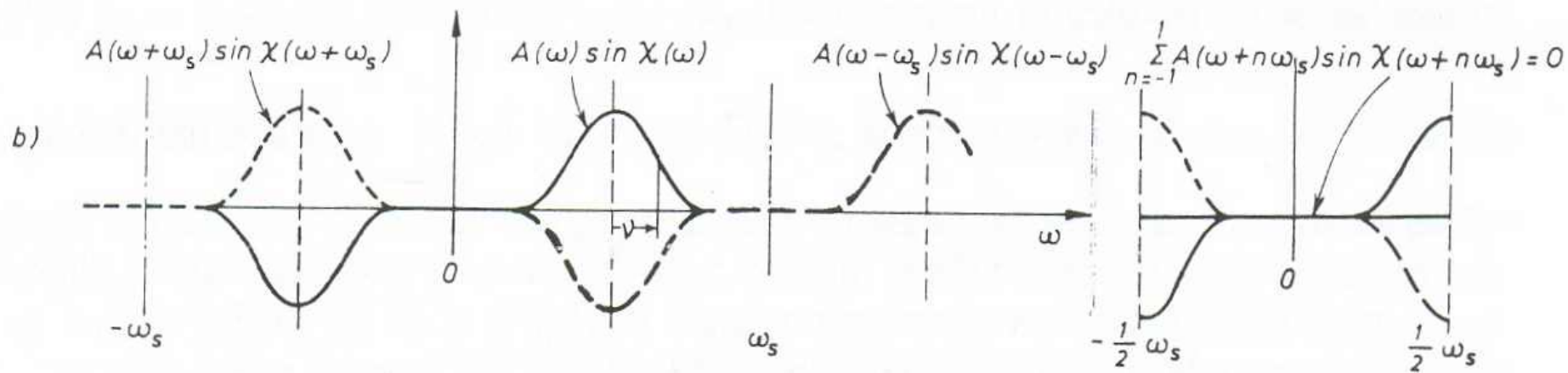
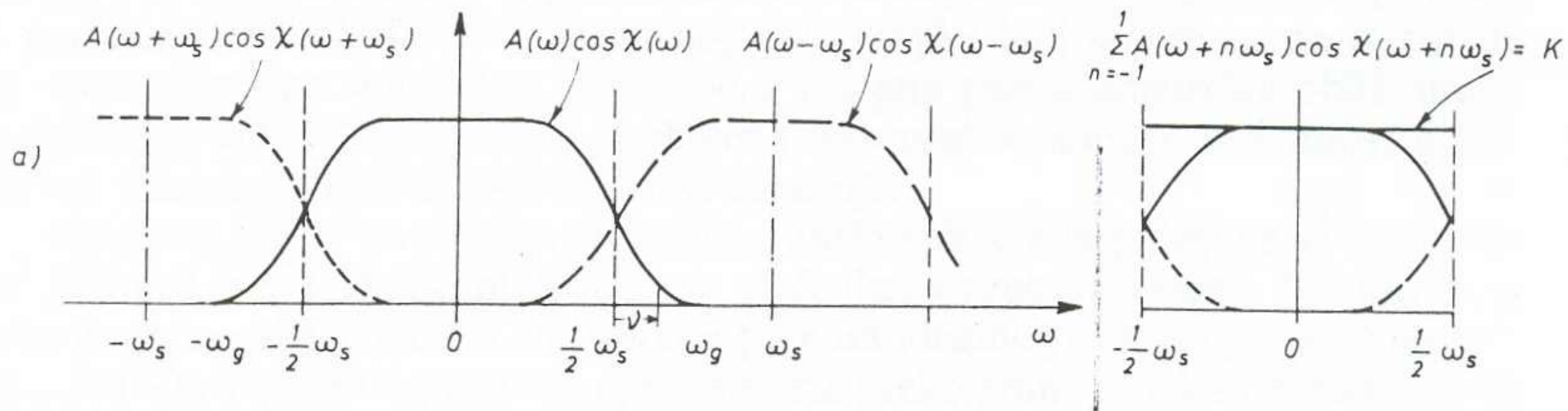
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A(\omega + n\omega_s) \cos \chi(\omega + n\omega_s) = K, \quad -\frac{1}{2}\omega_s \leq \omega \leq \frac{1}{2}\omega_s$$
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A(\omega + n\omega_s) \sin \chi(\omega + n\omega_s) = 0, \quad -\frac{1}{2}\omega_s \leq \omega \leq \frac{1}{2}\omega_s$$

ovdje je:

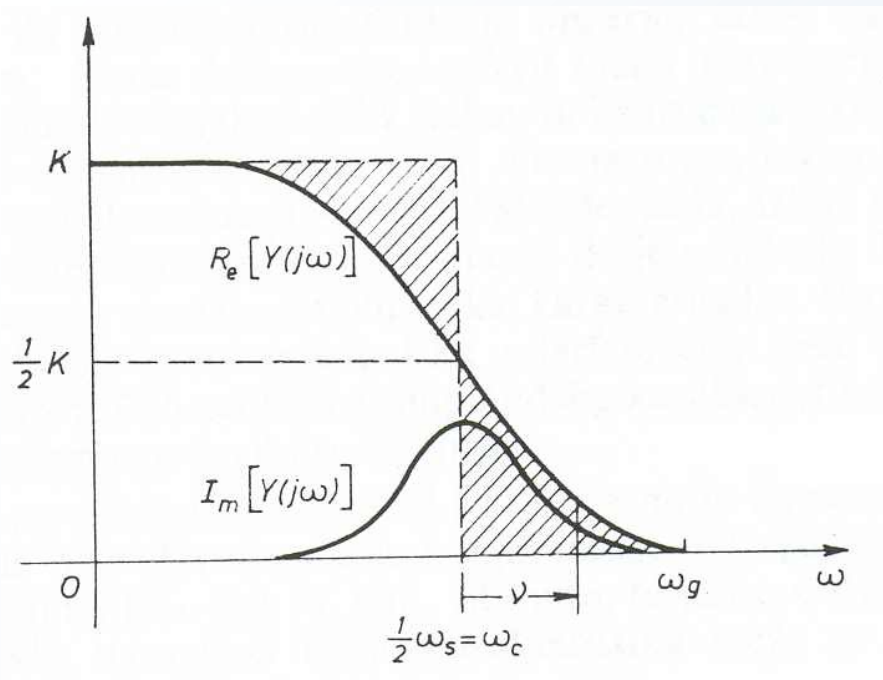
$$A(\omega) \cos \chi(\omega) + A(\omega - \omega_s) \cos \chi(\omega - \omega_s) = K, \quad 0 \leq \omega \leq \frac{1}{2}\omega_s$$

$$A(\omega) \sin \chi(\omega) + A(\omega - \omega_s) \sin \chi(\omega - \omega_s) = 0, \quad 0 \leq \omega \leq \frac{1}{2}\omega_s$$

Odnosno, realni i imaginarni dio funkcije prenosa imaju oblik kao na slici:



Izdvojimo samo jedan detalj sa prethodne slike:



Kao što se vidi sa ove slike i datih izraza, realni i imaginarni dio funkcije prenosa imaju određenu simetriju. Naime, realni dio može da se shvati kao da je sastavljen iz dva dijela: iz pravougaonog oblika, prikazanog isprekidanom linijom, i zaobljenog oblika, koji je neparno simetričan u odnosu na tačku $(\omega_s/2, K/2)$. Pri tome, zaobljena kriva linija definiše osjenčenu površinu koja se oduzima od pravougaonog oblika i dodaje iznad učestanosti $\omega_c = \omega_s/2$ kako bi se dobio realni dio funkcije prenosa. Što se tiče imaginarnog dijela funkcije prenosa, on je parno simetričan u odnosu na pravu $\omega = \omega_c = \omega_s/2$.

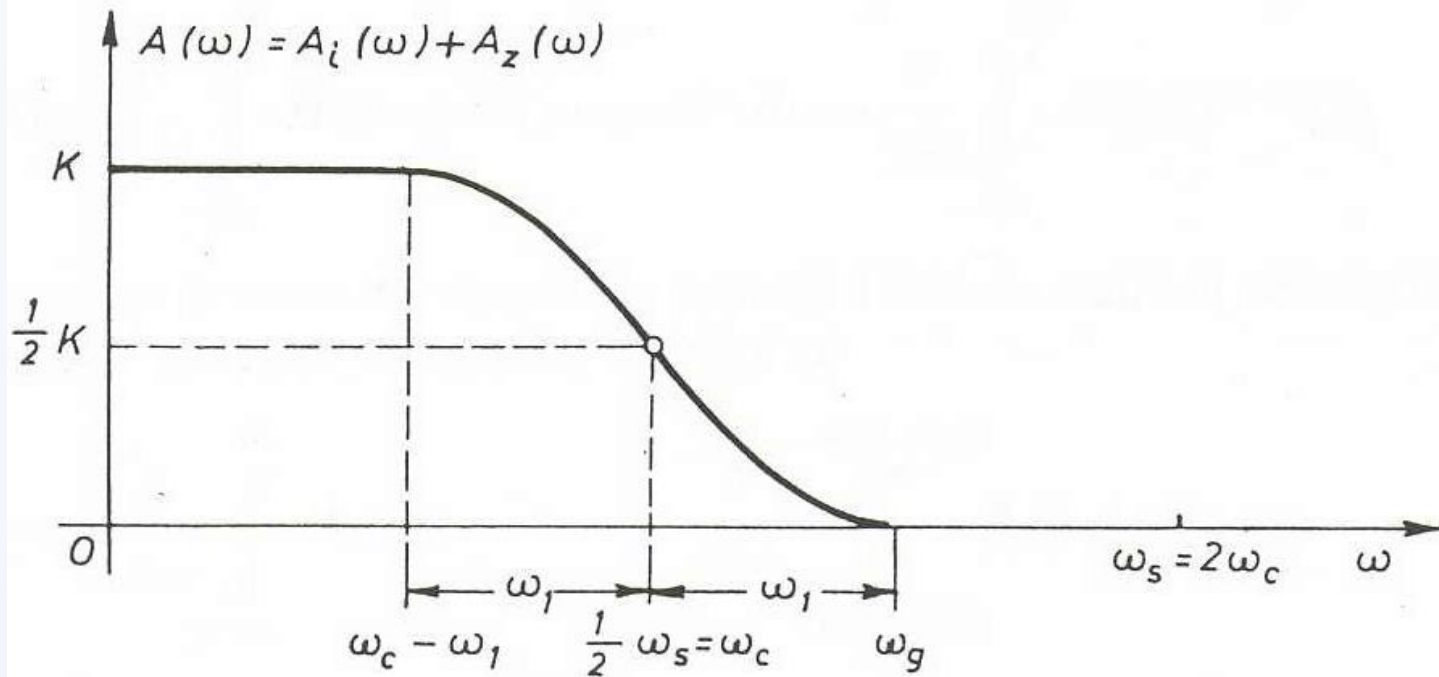
Kako je $\omega_s/2 = \omega_c \leq \omega_g \leq \omega_s = 2\omega_c$, Nyquist je zaključio da je moguće napraviti bezbroj funkcija prenosa koje obezbjeđuju prenos bez intersimbolske interferencije. Pri tome je definisao tzv. **Nyquist-ove uslove simetrije** koje te funkcije prenosa moraju zadovoljavati. Oni glase:

- ◆ Ako se pođe od idealnog sistema prenosa za koji je realni dio $\text{Re}[H(j\omega)]$ dat pravougaonim oblikom, a imaginarni dio $\text{Im}[H(j\omega)]$ je 0, i doda li se prvom neparno simetrično zaobljenje u odnosu na tačku $(\omega_s/2, K/2)$, a drugom parno simetričan oblik u odnosu na pravu $\omega = \omega_c = \omega_s/2$, uslovi za prenos bez interferencije među simbolima (Prvi Nyquist-ov kriterijum) biće uvijek ispunjeni.

PRIMJERI NYQUIST-OVIH SISTEMA ZA PRENOS

Funkcije prenosa sa kosinusoidalnim zaobljenjem

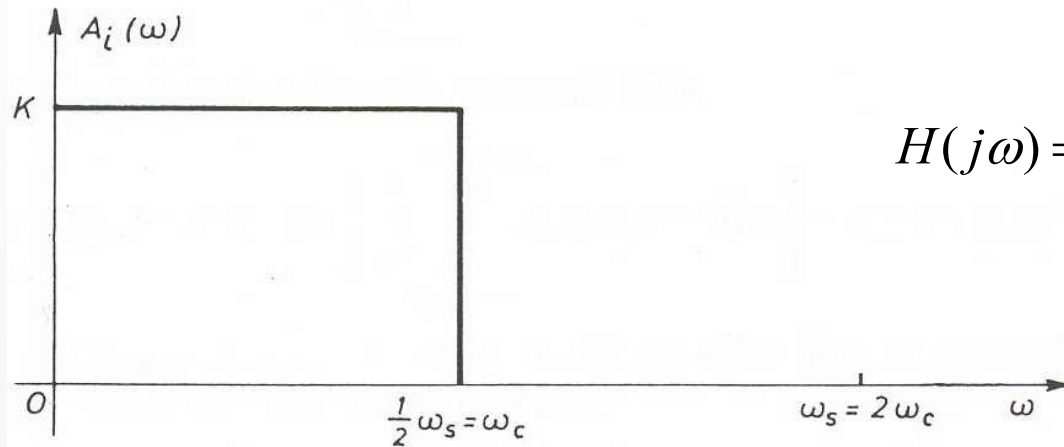
Razmotrimo jednu klasu funkcija prenosa koje zadovoljavaju Prvi Nyquist-ov kriterijum. Pretpostavimo da je kod njih fazna funkcija ravna nuli ($\chi(\omega)=0$, tj. nema kašnjenja), a da amplitudska karakteristika ima opšti oblik kao na slici. Idealnom sistemu prenosa je dodato **neparno** zaobljenje definisano kosinusnom funkcijom.



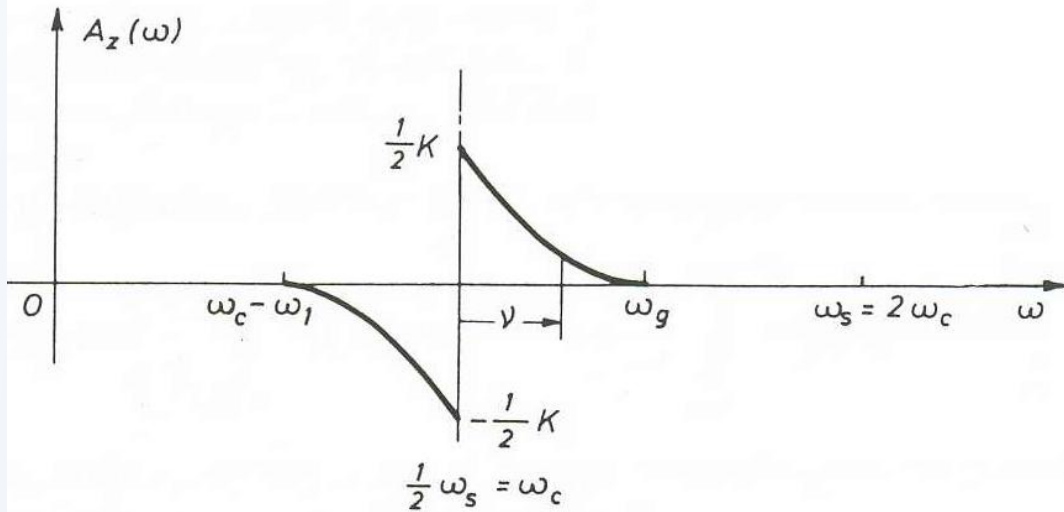
Da bi provjerili da li u trenucima odabiranja ima ISI treba pronaći odziv takvog sistema na pobudu u vidu delta impulsa ($x(t)=\delta(t)$).

U tu svrhu pretpostavljena amplitudska karakteristika $A(\omega)$ može da se razloži na dvije komponente:

1. Idealni dio sistema označen sa $A_i(\omega)$
2. Izobličenje u odnosu na idealnu karakteristiku označeno sa $A_z(\omega)$



$$H(j\omega) = A(\omega) = A_i(\omega) + A_z(\omega)$$



Odziv ovakvog sistema je:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} A_i(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-(\omega_c+\omega_1)}^{-(\omega_c-\omega_1)} A_z(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_c-\omega_1}^{\omega_c+\omega_1} A_z(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Poslednja dva integrala su u smislu vrijednosti jednaka, pa se dobija:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} A_i(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\pi} \int_{\omega_c-\omega_1}^{\omega_c+\omega_1} A_z(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] = y_i(t) + y_z(t)$$

Dobijeni odziv se sastoji od dvije komponente. Jedna je posljedica idealnog dijela karakteristike prenosa, a druga je od zaobljenja.

Kako je $A_i(\omega) = K$, to je odziv na idealni dio prenosne karakteristike sistema:

$$y_i(t) = K \frac{2\omega_s}{2\pi} \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t} = \frac{K}{T} \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t} = y_0 \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t}$$

Komponenta odziva koja potiče od zaobljenja karakteristike je:

$$y_z(t) = \text{Re} \left[\frac{1}{\pi} \int_{\omega_c - \omega_1}^{\omega_c} A_z(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{\pi} \int_{\omega_c}^{\omega_c + \omega_1} A_z(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right]$$

Uvedimo pomjeraje u odnosu na centralnu učestanost:

$$y_z(t) = \text{Re} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_1} A_z(\omega_c - \nu) e^{j\omega_c t} e^{-j\nu t} d\nu + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_1} A_z(\omega_c + \nu) e^{j\omega_c t} e^{j\nu t} d\nu \right]$$

Posmatrana funkcija zadovoljava Nyquist-ov kriterijum simetrije, tj. zaobljenje je neparno simetrično, pa važi da je:

$$A_z(\omega_c - \nu) = -A_z(\omega_c + \nu)$$

Odavde se dobija da je:

$$y_z(t) = \frac{2}{\pi} \sin \omega_c t \int_0^{\omega_1} A_z(\omega_c - \nu) \sin \nu t d\nu$$

Ukupan odziv sistema je:

$$y(t) = y_i(t) + y_z(t) = \frac{K}{T} \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t} + \frac{2}{\pi} \sin \omega_c t \int_0^{\omega_1} A_z(\omega_c - \nu) \sin \nu t d\nu$$

Ako pretpostavimo kosinusoidalno zaobljenje tako da je:

$$A_z(\omega) = K \begin{cases} -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} \frac{|\omega| - \omega_c}{\omega_1}, & \omega_c - \omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_c \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} \frac{|\omega| - \omega_c}{\omega_1}, & \omega_c \leq |\omega| \leq \omega_c + \omega_1 \end{cases}$$

ukupna prenosna funkcija postaje:

$$A(\omega) = K \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c - \omega_1 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} \frac{|\omega| - \omega_c}{\omega_1}, & \omega_c - \omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_c + \omega_1 \\ 0, & |\omega| \geq \omega_c + \omega_1 \end{cases}$$

Uobičajeno je da se za ovakve zaobljene karakteristike definiše **faktor zaobljenja** (“roll off”) kao odnos ω_1 i ω_c :

$$\xi = \frac{\omega_1}{\omega_c}$$

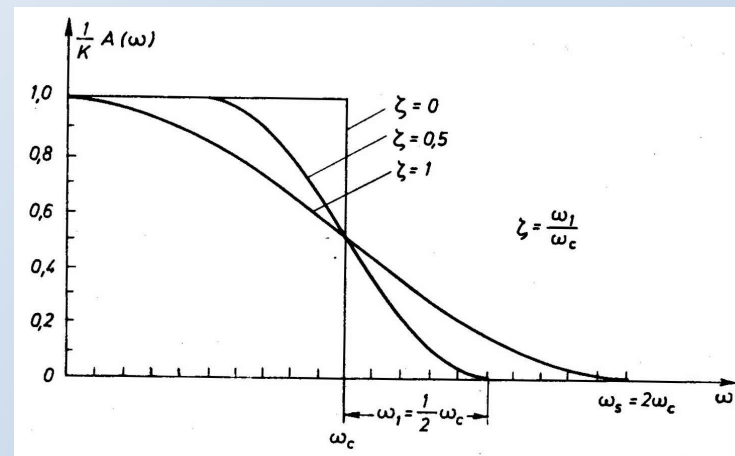
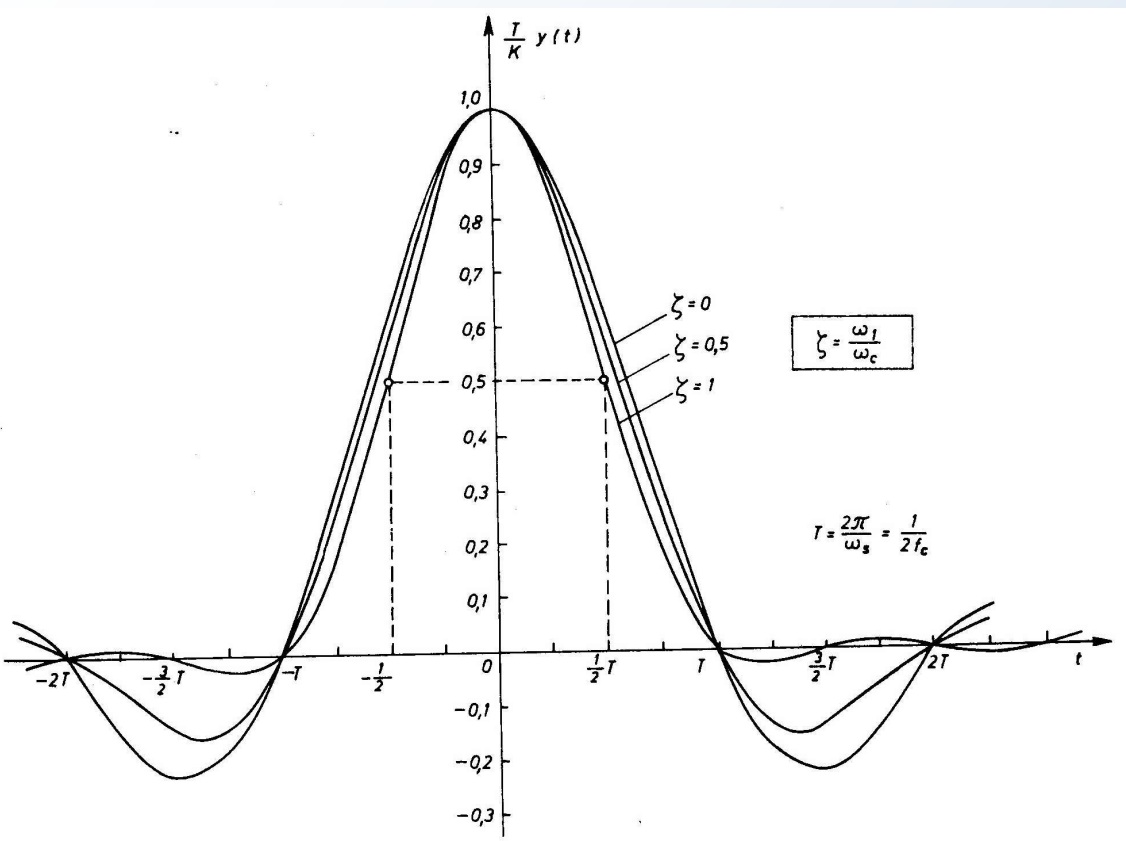
Kod sistema iz grupe Nyquist-ovih slučajeva ovaj faktor se kreće u granicama od 0 (idealni sistem) do 1 (maksimalno proširenje sistema, duplo veći opseg od idealnog).

Da bi se pronašao traženi odziv sistema čija amplitudska karakteristika ima kosinusoidalno zaobljenje na pobudu δ impulsom potrebno je u izraz za odziv sistema uvrstiti karakteristiku $A_z(\omega)$, pa se konačno dobija:

$$y(t) = \frac{K}{T} \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t} + \frac{2}{\pi} \sin \omega_c t \int_0^{\omega_1} K \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi \nu}{2 \omega_1} \right) \sin \nu t d\nu$$

$$y(t) = \frac{K}{T} \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t} \frac{\cos \omega_1 t}{1 - \left(\frac{2\omega_1 t}{\pi} \right)^2}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{1}{2f_c}$$

Za različite vrijednosti *roll off* faktora dobijaju se različiti oblici odziva. Neki od njih su prikazani na slici, i to: slučaj idealne amplitudske karakteristike za koji je faktor zaobljenja $\xi=0$, slučaj u kome je faktor zaobljenja $\xi=0,5$ i slučaj u kome je $\xi= 1$. Prikazane su i odgovarajuće amplitudske karakteristike ovih sistema.



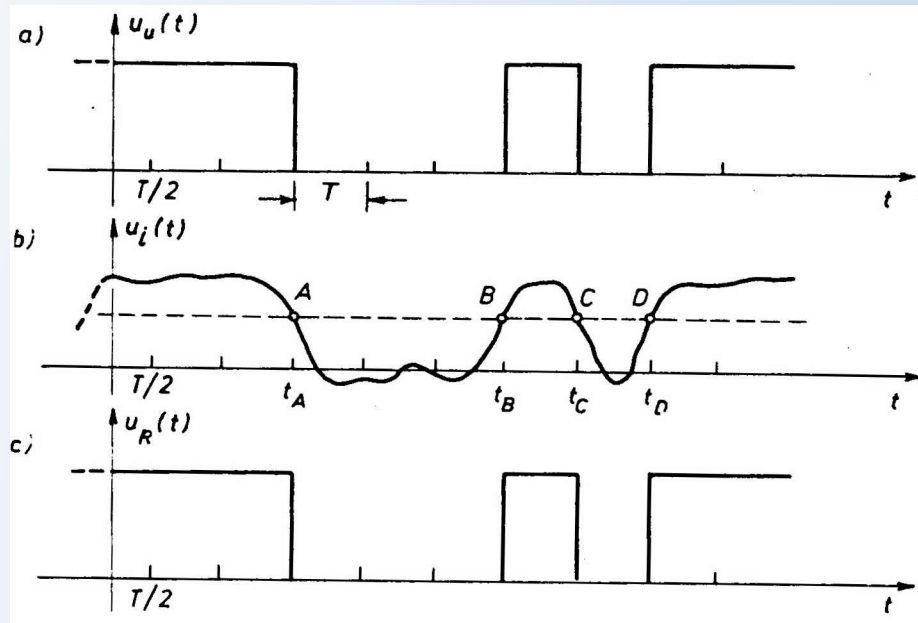
Analizirajući impulsni odziv vidi se da se unošenjem zaobljenja u amplitudsku karakteristiku nije izmijenio ni položaj nula odziva u odnosu na odziv idealnog sistema, ni maksimalna vrijednost odziva $y(0)=y_0=K/T$, što je ključno za zaključak da ne postoji intersimbolska interferencija u trenucima značajnim za odlučivanje u prijemniku.

Pri tome, uticaj zaobljenja je takav da je amplituda oscilacija u »repu« odziva utoliko manja ukoliko je faktor zaobljenja ξ bliži vrijednosti 1. To znači da ako i dođe do intersimbolske interferencije iz bilo kojih razloga, njen uticaj će biti manji ako postoji zaobljenje.

Posebnu pažnju zaslužuje karakteristika čiji je faktor zaobljenja $\xi=1$. Ovakva karakteristika naziva se često i karakteristikom "*podignuti kosinus*". Sa slike se vidi da su u tom slučaju amplitude oscilacija u odzivu ne samo smanjene već se u odzivu javljaju i dodatne nule u trenucima $\pm 3T/2, \pm 5T/2, \pm 7T/2, \dots, (2n+1)T/2$, a u tačkama $\pm T/2$ relativna amplituda odziva iznosi 0,5. To ima poseban značaj i na to ćemo se osvrnuti onda kad bude riječi o Drugom Nyquist-ovom kriterijumu.

DRUGI NYQUIST-OV KRITERIJUM

Kada je zadovoljen Prvi Nyquist-ov kriterijum onda je sigurno da u trenucima koji se nalaze u sredini signalizacionih intervala primljenog signala ne postoji intersimbolska interferencija. Na taj način amplituda signala u ovim tačkama ne podliježe izobličenjima ove vrste. **Drugi Nyquist-ov kriterijum** govori o tome kako je moguće obezbijediti prenos u kome ne dolazi do izobličenja trajanja značajnih stanja signala. Očigledno, ovo će biti ispunjeno ako trenuci promjene značajnih stanja signala budu bez uticaja ISI. Za signale koji imaju dva takva stanja Nyquist kaže: “Kriterijum za savršen prenos je da interval između trenutaka kada struja prolazi kroz srednju vrijednost (ili neku drugu specificiranu vrijednost) treba biti isti kao i odgovarajući interval na strani predaje”. Takva situacija je ilustrovana na sledećoj slici:.



Poslati signal $u_u(t)$ koji ima dva značajna stanja izobličiti se tokom prenosa. Neka na ulazu u sklop za odlučivanje izgleda otprilike kao na slici b). Pretpostavimo da je prag odlučivanja u prijemniku postavljen na ispravno odabranu vrijednost označenu isprekidanom linijom. Ako u trenucima t_A , t_B , t_C i t_D ne postoji intersimbolska interferencija, prijemnik će donositi ispravne odluke o trajanju značajnih stanja signala i signal na njegovom izlazu $u_R(t)$ će izgledati kao na slici c).

Iz ovih razmatranja se može zaključiti:

- promjena značajnih stanja smije da se odigrava uvijek na ivicama signalizacionih intervala, dakle, u trenucima t koji su jednaki pozitivnim i negativnim neparnim multiplima od $T/2$, gdje T predstavlja trajanje signalizacionog intervala.

-Drugi Nyquist-ov kriterijum biće uvijek zadovoljen ako standardni odziv $y(t)$ bude imao vrijednost $y_1/2$ u trenucima $t=\pm T/2$ i ako u svim ostalim trenucima koji su ravni pozitivnim i negativnim neparnim multiplima od $T/2$ bude jednak 0. Izrečeni stav obezbjeđuje da u svakoj od tačaka na ivicama signalizacionih intervala, amplituda složenog signala ima ili vrijednost 0, ili $y_1/2$, ili y_1 . Ako prag odlučivanja u prijemniku postavimo na vrijednost $y_1/2$, prijemnik će registrovati trenutke promjene u kojima se značajno stanje mijenja iz 0 u 1 i obratno.

Ovoj formulaciji treba dodati i sledeće napomene.

- obavezno je da kompletan digitalni signal na prijemu unutar bilo kog svog signalizacionog intervala ne prolazi kroz vrijednost $y_1/2$ kako ne bi došlo do promjene odluke unutar samog intervala.

- treba dodati i onaj slučaj u kome bi signal duže vremena zadržavao vrijednost $y_1/2$, što bi dovelo do toga da se odluka ne može donijeti (neki oblici binarnih signala pokazuju ovaj efekat).

Imajući u vidu sve što je rečeno, Drugi Nyquist-ov kriterijum može da se analitički formuliše na sledeći način:

Standardni odziv $y(t)$ mora da zadovolji uslov:

$$y\left[(2m-1)\frac{T}{2}\right] = \frac{y_1}{2} (\delta_{m0} + \delta_{m1}), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$\delta_{i,j}$ je Kroneckerova delta.

Ovo je formulacija drugog Nyquist-ovog kriterijuma u domenu vremena. U domenu učestanosti biće:

$$y\left[(2m-1)\frac{T}{2}\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega) e^{j\omega(2m-1)\frac{T}{2}} d\omega$$

Pošto je :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n Y[j(\omega + n\omega_s)] = y_1 \frac{2\pi}{\omega_s} \frac{1}{2} (e^{j\frac{\pi}{\omega_s}\omega} + e^{-j\frac{\pi}{\omega_s}\omega}), \quad -\frac{1}{2}\omega_s \leq \omega \leq \frac{1}{2}\omega_s$$

To se može zapisati i kao:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n Y[j(\omega + n\omega_s)] = y_1 T \cos \frac{\pi}{\omega_s} \omega, \quad -\frac{1}{2}\omega_s \leq \omega \leq \frac{1}{2}\omega_s$$

Izvedena relacija predstavlja uslov koji treba da bude zadovoljen u sistemu za prenos pa da u trenucima u kojima se mijenja značajno stanje signala nema intersimbolske interferencije. tj. ovaj izraz iskazuje Drugi Nyquist-ov kriterijum u frekvencijskom domenu.

Odavde se lako izvodi uslov koji mora da zadovolji funkcija prenosa sistema. Pretpostavi li se da se sistem pobuđuje standardnim signalom u obliku delta impulsa, $x(t)=\delta(t)$, onda će odziv $y(t)$ predstavljati impulsni odziv sistema, a njegova *Fourier*-ova transformacija $Y(j\omega)$ biće jednaka funkciji prenosa.

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = H(j\omega) = A(\omega)e^{j\chi(\omega)}$$

Uvrštavajući ovo u dobijeni izraz i izjednačavajući realni i imaginarni dio dobija se :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n A(\omega + n\omega_s) \cos \chi(\omega + n\omega_s) = y_1 T \cos \frac{\pi}{\omega_s} \omega, \quad -\frac{1}{2} \omega_s \leq \omega \leq \frac{1}{2} \omega_s$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n A(\omega + n\omega_s) \sin \chi(\omega + n\omega_s) = 0, \quad -\frac{1}{2} \omega_s \leq \omega \leq \frac{1}{2} \omega_s$$

Ovo su uslovi koje treba da zadovoljavaju realni i imaginarni dio funkcije prenosa sistema pa da bude zadovoljen Drugi Nyquist-ov kriterijum, tj. da ne dođe do ISI.

SISTEM MINIMALNOG PROPUSNOG OPSEGA:

Ako pretpostavimo da prenosimo signal u osnovnom opsegu učestanosti sistemom propusnikom niskih učestanosti definisanim na sledeći način:

$$A(\omega) = \begin{cases} A(\omega), & |\omega| \leq \frac{1}{2} \omega_s = \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad \chi(\omega) = \begin{cases} \chi(\omega), & |\omega| \leq \frac{1}{2} \omega_s = \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

Ako primijenimo izvedene uslove za realni i imaginarni dio funkcije prenosa dobija se:

$$A(\omega) \cos \chi(\omega) = y_1 T \cos \frac{\pi}{\omega_s} \omega, \quad |\omega| \leq \frac{1}{2} \omega_s$$

$$A(\omega) \sin \chi(\omega) = 0, \quad |\omega| \leq \frac{1}{2} \omega_s$$

odakle je:

$$A(\omega) = \begin{cases} y_1 T \cos \frac{\pi}{\omega_s} \omega, & |\omega| \leq \frac{1}{2} \omega_s \\ 0, & |\omega| \geq \frac{1}{2} \omega_s \end{cases} \quad \chi(\omega) = 0, \quad |\omega| \leq \frac{1}{2} \omega_s$$

Prema tome, funkcija prenosa sistema minimalnog propusnog opsega koji zadovoljava Drugi Nyquist-ov kriterijum se svodi na:

$$H(j\omega) = A(\omega) = \begin{cases} y_1 T \cos \frac{\pi}{\omega_s} \omega, & |\omega| \leq \frac{1}{2} \omega_s = \omega_c \\ 0, & |\omega| \geq \frac{1}{2} \omega_s = \omega_c \end{cases}$$

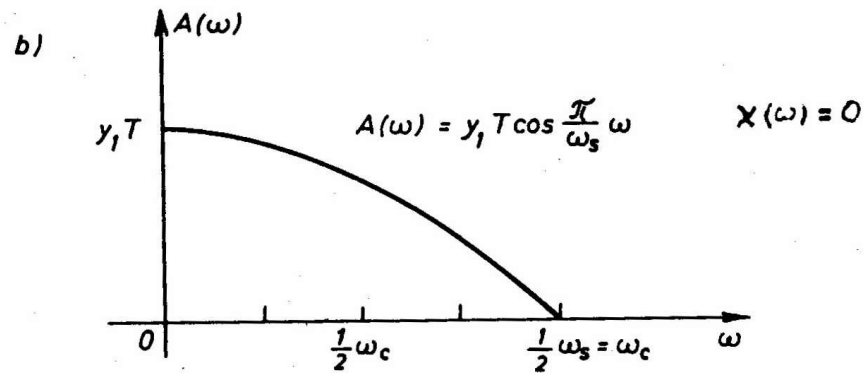
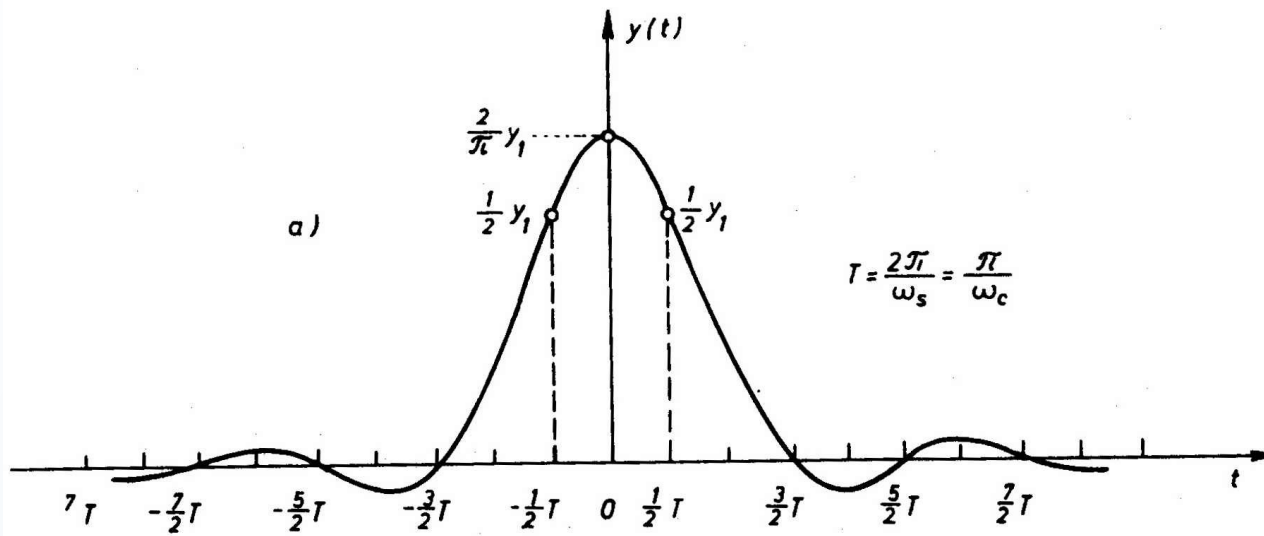
Vidi se da, za razliku od sistema minimalnog propusnog opsega koji zadovoljava Prvi Nyquist-ov kriterijum, sistem minimalnog propusnog opsega koji zadovoljava Drugi Nyquist-ov kriterijum nije idealan, već se fizički može realizovati.

Odziv ovog sistema na impulsnu pobudu je dat sa:

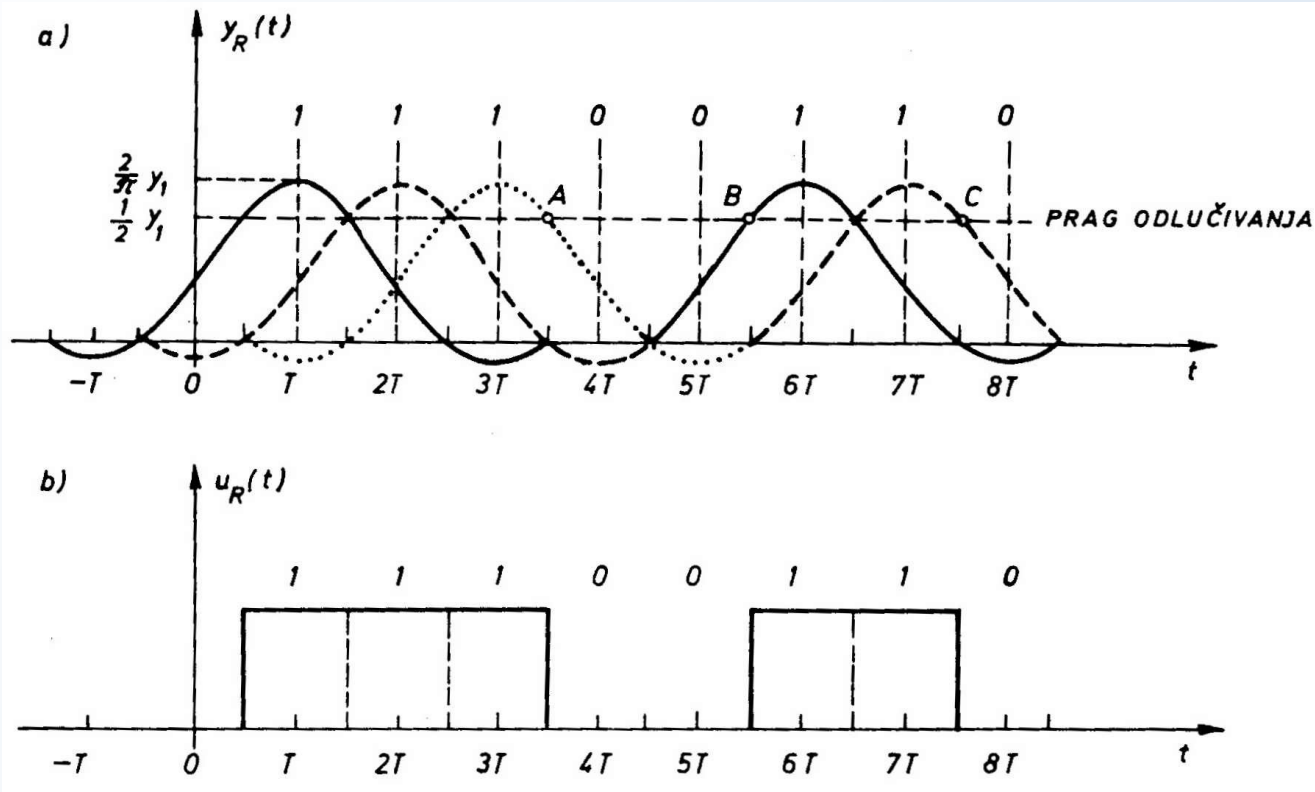
$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} y_1 T \cos \frac{\pi}{\omega_s} \omega \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

$$y(t) = \frac{2}{\pi} y_1 \frac{\cos \omega_c t}{1 - \left(\frac{2\omega_c t}{\pi}\right)^2}, \quad \omega_c = \frac{1}{2} \omega_s$$

Prilazni i odlazni funkcija prenosu imaju oblik kao na slici:



Kao što se vidi odziv $y(t)$ u tačkama $t=\pm T/2$ ima vrijednost $y_1/2$, a za sve pozitivne i negativne neparne multiple od $T/2$ ima vrijednost 0. Zahvaljujući ovakvom obliku standardnog odziva $y(t)$ u trenucima u kojima nastupa promjena značajnog stanja ne postoji intersimbolska interferencija, pa prema tome ni trajanja značajnih stanja signala nisu izobličena. Ovo može da se vidi sa slike:



U tačkama A, B i C mijenja se značajno stanje signala. U tim trenucima ne postoji intersimbolska interferencija i vrijednost amplitude u njima iznosi $y_1/2$. Kako je ova vrijednost ravna pragu odlučivanja, to ni trajanje značajnih stanja za ovakav signal nisu izobličena.

NYQUIST-OVI SLUČAJEVI (Drugi Nyquist-ov kriterijum)

I kod Drugog Nyquist-ovog kriterijuma postoji mogućnost da se proširi propusni opseg sistema. Ovdje razlog nije povezan sa fizičkom realizacijom (kao kod Prvog Nyquist-ovog kriterijuma kod koga je sistem minimalnog propusnog opsega ujedno i idealni sistem), već sa stvaranjem uslova za povećanje broja sistema koji zadovoljavaju Drugi Nyquist-ov kriterijum. Funkcije prenosa takvih sistema su oblika:

$$A(\omega) = \begin{cases} A(\omega), & |\omega| \leq \omega_g \\ 0, & |\omega| > \omega_g \end{cases} \quad \omega_c \leq \omega_g \leq 2\omega_c$$

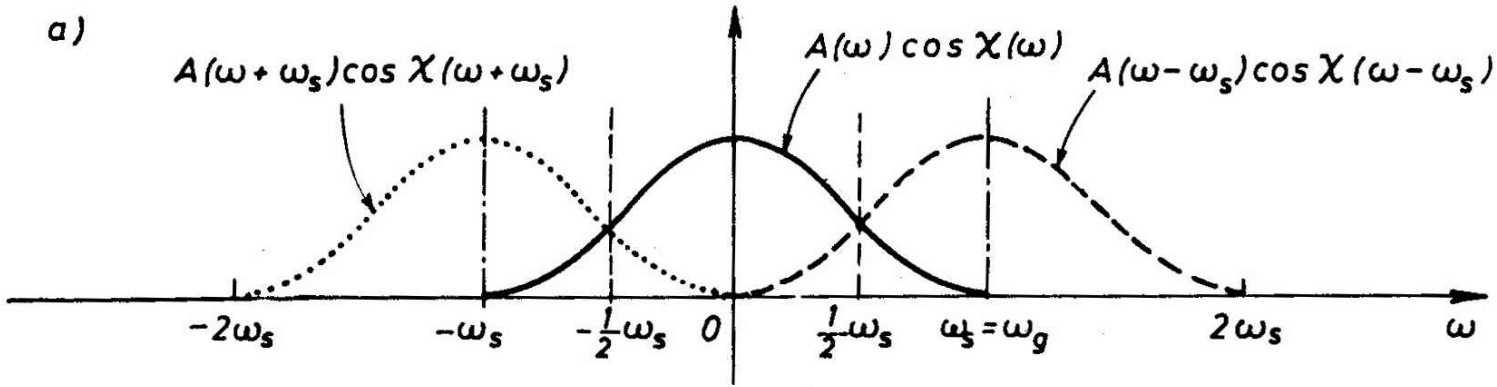
Opšti uslovi za realni i imaginarni dio karakteristike postaju oblika:

$$A(\omega) \cos \chi(\omega) - A(\omega - \omega_s) \cos \chi(\omega - \omega_s) = y_1 T \cos \frac{\pi}{\omega_s} \omega, \quad 0 \leq \omega \leq \frac{1}{2} \omega_s$$

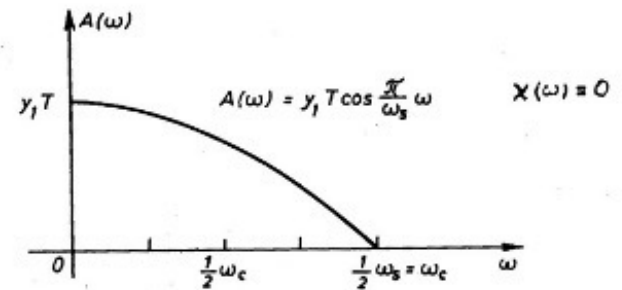
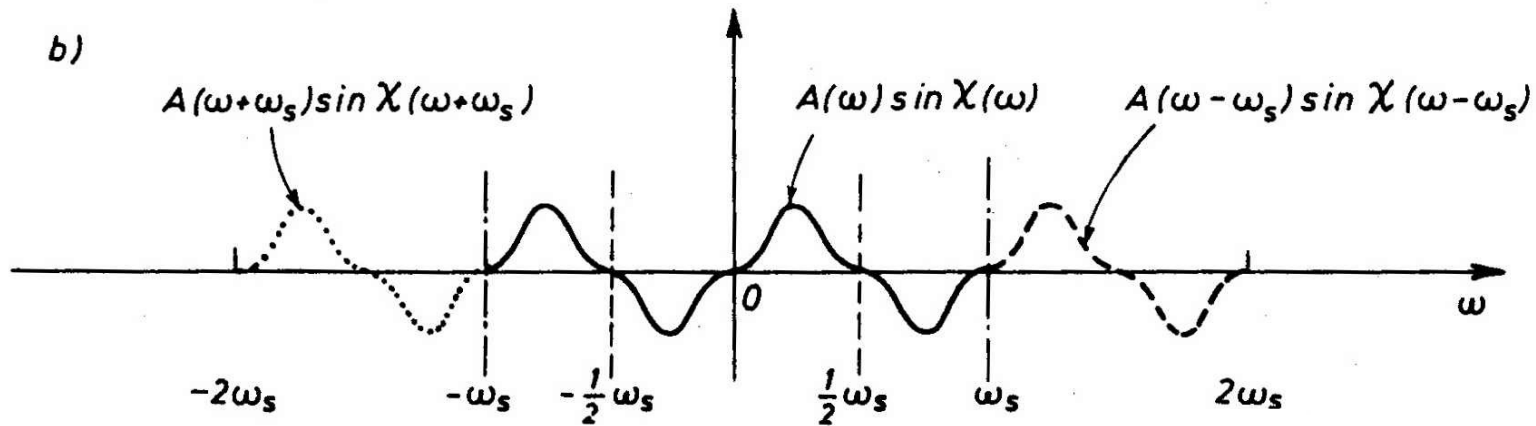
$$A(\omega) \sin \chi(\omega) - A(\omega - \omega_s) \sin \chi(\omega - \omega_s) = 0, \quad 0 \leq \omega \leq \frac{1}{2} \omega_s$$

Jedan primjer funkcija prenosa koje spadaju u grupu Nyquist-ovih slučajeva po Drugom Nyquist-ovom kriterijumu:

a)



b)



I po Drugom Nyquist-ovom kriterijumu se za funkcije prenosa koje spadaju u Nyquist-ove slučajeve definišu **uslovi simetrije** tako da kriterijum bude zadovoljen:

realnom dijelu karakteristike sistema sa minimalnim propusnim opsegom može da se superponira dodatak koji ima parnu simetriju u odnosu na pravu $\omega = \omega_s/2 = \omega_c$, a imaginarnom dijelu neparno simetrično zaobljenje u odnosu na tačku $\omega = \omega_s/2 = \omega_c$.

Jedna od funkcija koja zadovoljava ove uslove je funkcija prenosa “**podignuti kosinus**”. Ona ima poseban značaj u prenosu digitalnih signala zato što ovakva funkcija prenosa zadovoljava i Prvi i Drugi Nyquist-ov kriterijum.

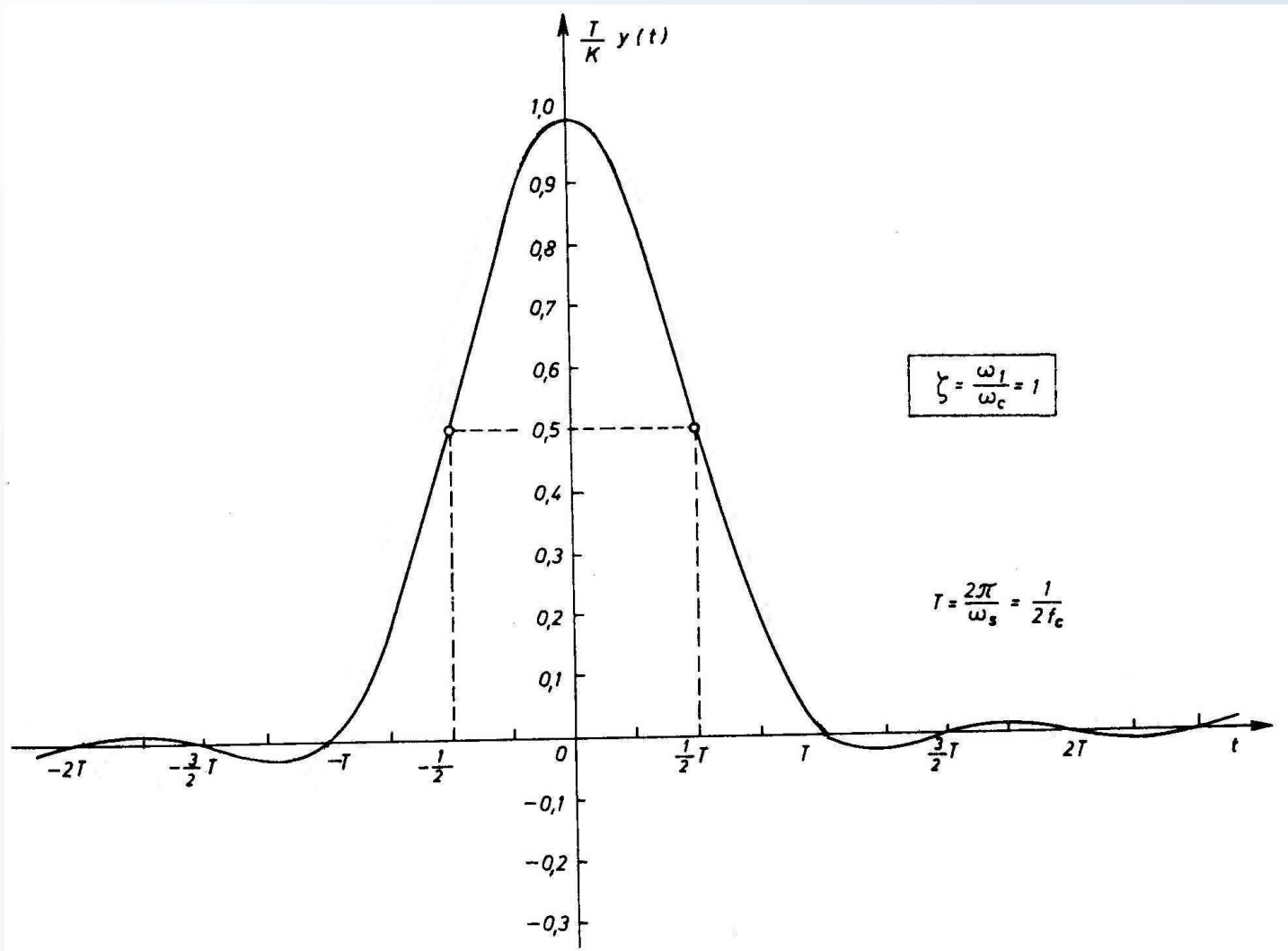
Pretpostavimo da je fazna karakteristika sistema $\chi(\omega) = 0$, a amplitudska karakteristika:

$$A(\omega) = K \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{\omega_s} \omega = \cos^2 \frac{\pi}{2\omega_s} \omega, & |\omega| \leq \omega_s = 2\omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_s \end{cases}$$

Kod ove funkcije *roll off* faktor je jednak jedinici, a impulsni odziv sistema je:

$$y(t) = \frac{K}{T} \frac{1}{1 - \left(\frac{2\omega_c t}{\pi}\right)^2} \frac{\sin 2\omega_c t}{2\omega_c t}, \quad \frac{K}{T} = y_0$$

Vidi se da je ispunjen Prvi Nyquist-ov kriterijum, tj. u trenutku $T=0$ funkcija ima maksimum, a u trenucima nT je jednaka nuli. Isto tako, u trenucima $\pm T/2$ odziv ima polovinu svoje maksimalne vrijednosti, a u trenucima $(2n+1)T/2$ ima vrijednost nula, tj. zadovoljen je i Drugi Nyquist-ov kriterijum.



TREĆI NYQUIST-OV KRITERIJUM

Treći Nyquist-ov kriterijum govori o tome kako je moguće izbjeći uticaj intersimbolske interferencije kada se za značajan parametar signala izabere površina koju signal obuhvata u jednom signalizacionom intervalu. Naravno, tada ta površina predstavlja vrijednost signala i ona na prijemu može da se identifikuje prostom integracijom signala.

Ako sa $p(mT)$ označimo pomenutu površinu u m -tom signalizacionom intervalu koji zahvata period od $[(2m-1)T/2, (2m+1)T/2]$, onda se Treći Nyquist-ov kriterijum može analitički formulisati na sledeći način:

$$p(mT) = \int_{(2m-1)\frac{T}{2}}^{(2m+1)\frac{T}{2}} y(t) dt = p_0 \delta_{m0}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

tj. površina koju obuhvata signal u m -tom signalizacionom intervalu treba da bude određena samo onim što je u tom signalizacionom intervalu bilo poslato.

$y(t)$ predstavlja, kao i do sada, standardni odziv sistema na standardnu pobudu $x(t)$, a $\delta_{m,0}$ predstavlja Kroneckerovu deltu.

NYQUIST-OVI KRITERIJUMI ZA OPŠTI OBLIK STANDARDNOG SIGNALA

Postavlja se pitanje kako ostvariti Nyquist-ove kriterijume da nema intersimbolske interferencije i onda kada je standardni signal $x(t)$ dat u opštem obliku, tj. kada nije delta impuls.

U tom slučaju, Nyquist-ovi kriterijumi i uslovi koje oni zahtjevaju ostaće i dalje na snazi ako se obezbijedi da spektar standardnog signala na ulazu u sistem bude konstantan. To se može jednostavno uraditi tako što će se ispred sistema prenosa kaskadno vezati sklop koji modifikuje spektar standardnog signala i koji ima funkciju prenosa $H_x(j\omega)=1/X(j\omega)$ tako da se na njegovom izlazu dobije signal čiji je spektar identičan sa spektrom delta impulsa, tj. konstantan.

PRENOS SIGNALA KROZ REALNE KANALE I DIJAGRAM OKA

Neka se radi o prenosu u osnovnom opsegu učestanosti i neka na ulaz sistema dolazi digitalni signal:

$$u_u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k x(t - kT)$$

Odziv sistema na emitovani signal je:

$$u_i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k y(t - kT)$$

Pošto se signalu u toku prenosa superponira i šum, rezultatni signal na ulazu sklopa za odlučivanje je:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k y(t - kT) + \eta(t)$$

Neka se odbirci uzimaju u trenucima $t=nT$:

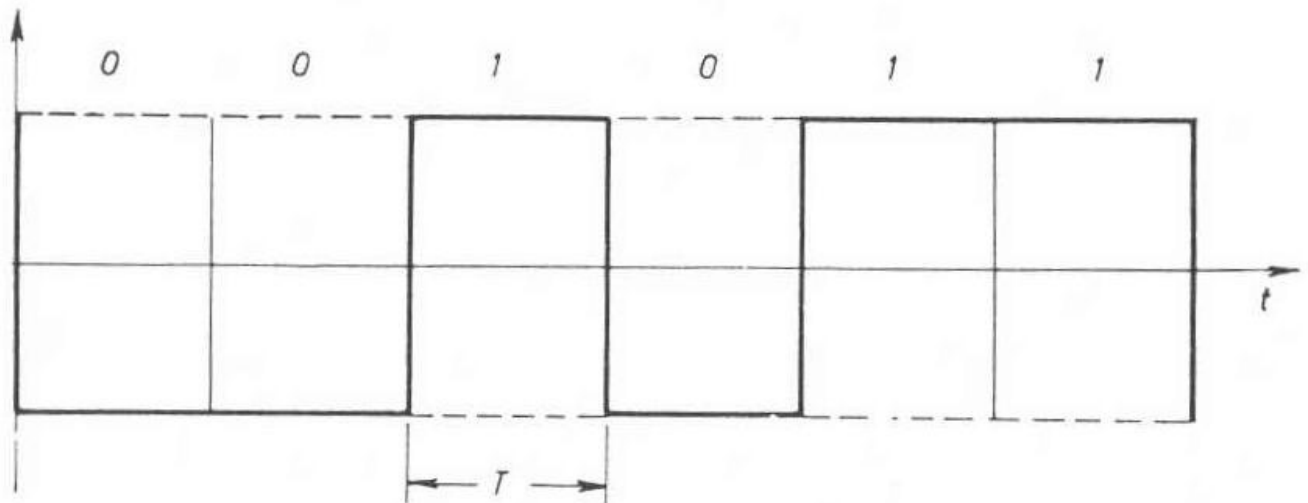
$$u(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k y(nT - kT) + \eta(nT)$$

Ovaj n -ti odbirak može da se piše i u obliku:

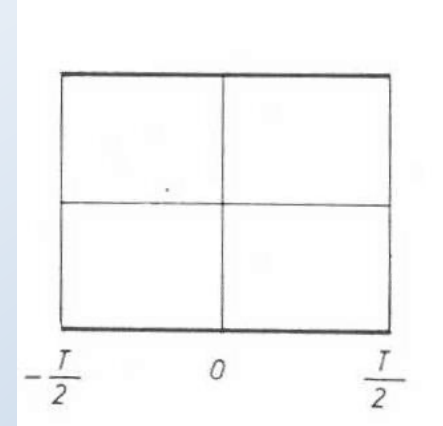
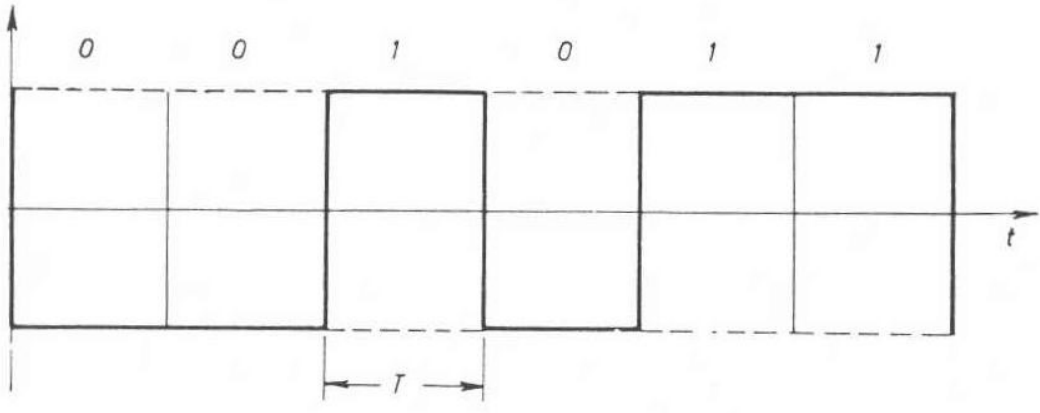
$$u_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k y_{n-k} + \eta_n = a_n y_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} a_k y_{n-k} + \eta_n$$

U slučaju da dio koji ne potiče od signala u n -tom intervalu nije jednak nuli jasno je da postoji ISI. Analiza prisutne ISI se eksperimentalno može izvršiti na relativno jednostavan i efikasan način pomoću tzv. **dijagrama oka**.

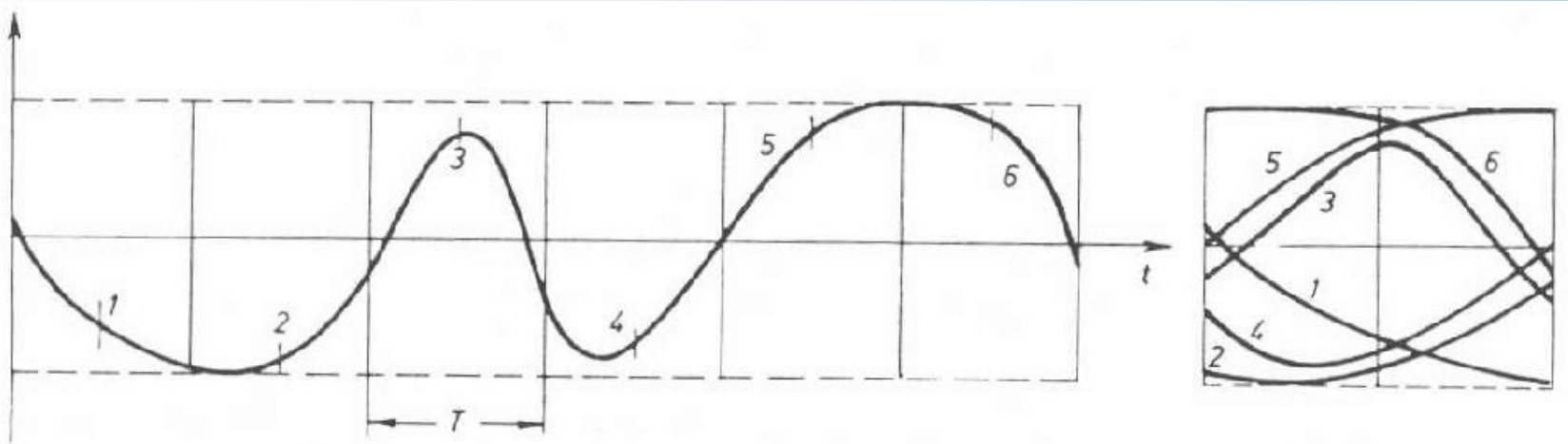
Posmatrajmo povorku pravougaonih polarnih impulsa kao na slici.



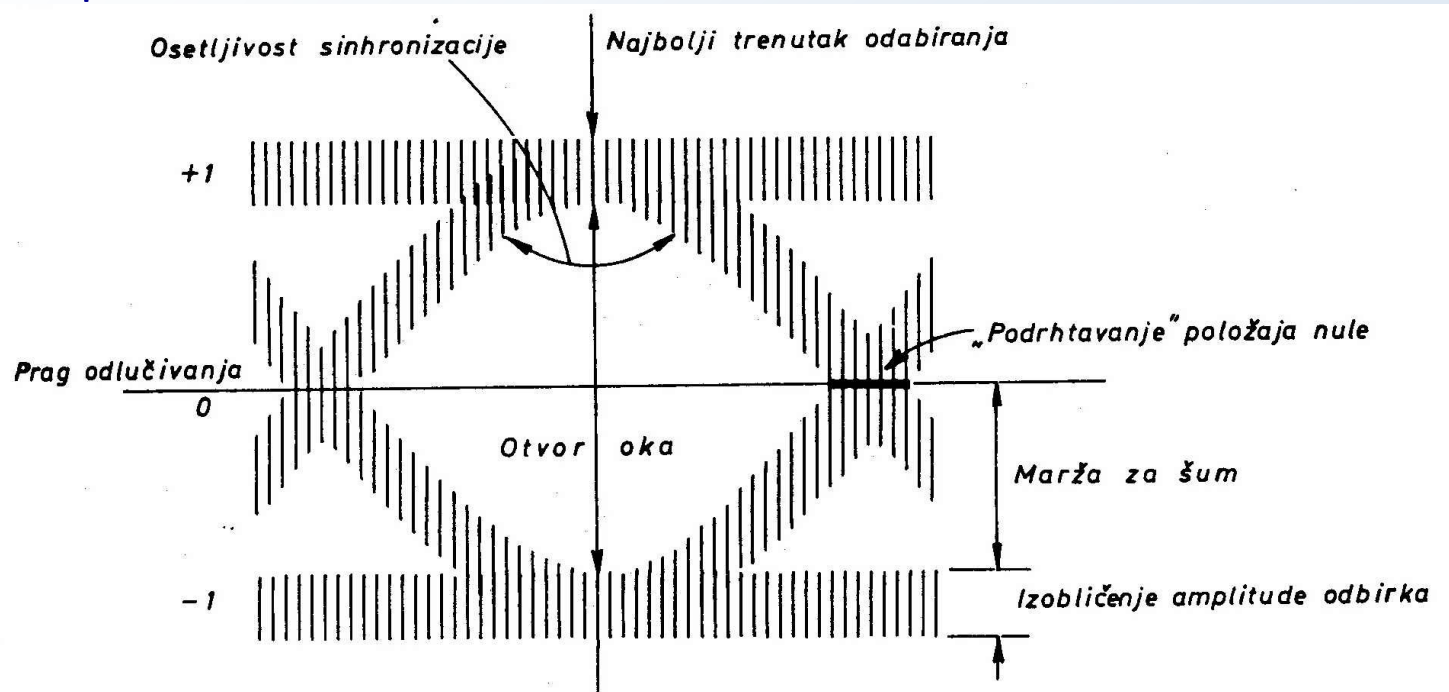
Ako bi ovakav signal doveli na ulaz osciloscopa čija je vremenska baza podešena trajanju jednog signalizacionog intervala T , onda bi se na njegovom ekranu dobio dijagram kao na slici desno. To su dvije deblje izvučene horizontalne linije nastale preklapanjem elemenata signala iz svih signalizacionih intervala.



Međutim, na drugoj strani veze primljeni signal je izobličen i može da ima formu kao na slici, pa preklopljeni tragovi ovog signala na ekranu osciloscopa izgledaju drugačije:



Ovi djelovi signala iz pojedinih signalizacionih intervala koji su preklopljeni jedan preko drugog daju **dijagram oka**. Naravno, ako se uzme duga povorka impulsa, mnoge linije će se preklopiti i obrazovaće se zadebljani tragovi. Oni su prikazani kao osjenčene površine na slici.



Otvor oka govori o tome kolika je intersimbolska interferencija: što je otvor oka veći to je interferencija manja. Isto tako, širina otvora daje indicaciju o tome koliki je vremenski interval u kome je moguće izabrati trenutak odabiranja. Konkretno, ta širina govori o osetljivosti sistema u pogledu tačnosti sinhronizacije: što je otvor širi, sistem je manje osetljiv na grešku u sinhronizaciji. Najbolji trenutak odabiranja je tamo gdje je otvor oka najveći.

Sa slike se vidi da položaji tačaka u kojima signal prolazi kroz nulu nisu na istom mjestu, već obrazuju jednu zonu. To je bitno jer se u mnogim sistemima referentni signal takta (sinhronizacije) za prijemni odabirač uzima iz samog primljenog digitalnog signala i to baš na osnovu njegovih presjeka sa nulom osom. Kako uslijed intersimbolske interferencije položaj tih presjeka sa nulom varira, to se kaže da greška u prenosu u ovom slučaju potiče od podrhtavanja takta prijemnog odabirača.

Debljina osjenčenih tragova govori o izobličenju amplitude odbiraka.

Rastojanje od linije koja označava prag odlučivanja pa do najbliže ivice traga, do one koja se nalazi sa unutrašnje strane otvora oka, predstavlja maržu za šum u dotičnom trenutku odabiranja. Naime, dokle god je šum manji od ove vrijednosti, on i kad se superponira amplitudi odgovarajućeg odbirka, još uvijek ne utiče na ispravnost donesene odluke.

Ovdje je bilo riječi o dijagramima oka za slučaj kad se oni snimaju pri prenosu binarnih signala. Isto tako je moguće snimati ove dijagrame i kada se radi o M-arnim signalima, samo se u tom slučaju dobija M-1 oblik oka jedan ispod drugog.